4.3.4 Goniometrické nerovnice II

Pedagogická poznámka: Před řešením následujících příkladů je dobré zdůraznit dvě věci:
jde o těžší příklady, které nemusí zvládnout každý (on je také zdaleka každý nestihne),
k jejich řešení není třeba nic nového mimo využití postupů, které jsme používali už dříve u jiných typů rovnic.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $-\frac{1}{2} < \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

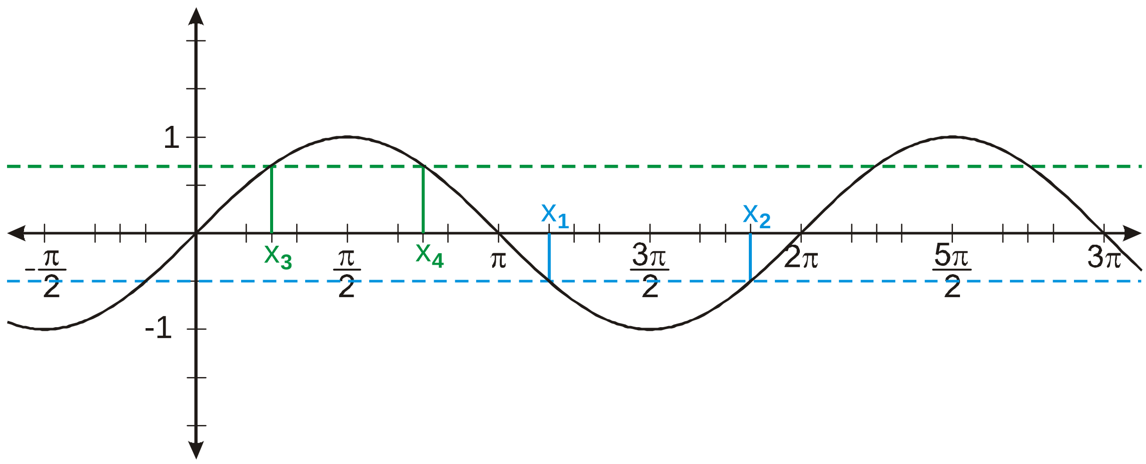
Problém: Nerovnice obsahuje dvě nerovnosti $\Rightarrow$ dvě možnosti řešení:

- vyřešíme každou nerovnost samostatně a výsledek určíme jako průnik obou řešení (musí platit obě nerovnosti současně) $\Rightarrow$ nevýhoda – dvojí práce s kreslením grafu (nebo kružnice),
- samostatně řešíme pouze rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$ a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, získané úhly nakreslíme do jednoho obrázku, kde rovnou určíme řešení (rychlejší postup s menší pravděpodobností chyby).

Základní řešení rovnic:

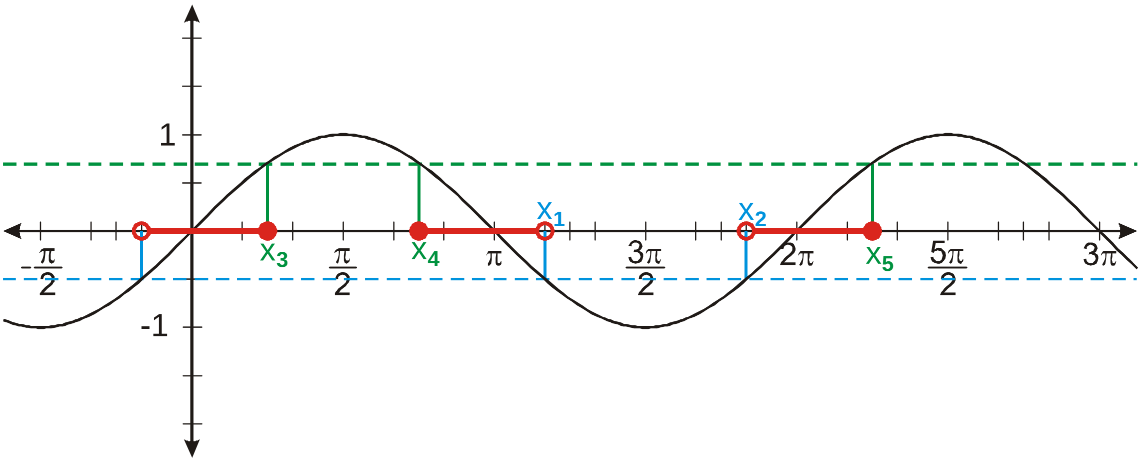
- $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{6}\pi$, $x_2 = \frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině),
- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$ (čtvrtinové úhly v kladné polorovině).

Do grafu vyznačíme přímky $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a všechny čtyři určené hodnoty úhlů:



Na ose x hledáme čísla, pro která:

- $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod (nebo stejně nízko) přímkou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = -\frac{1}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalech $\left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{6}\pi \right)$ a $\left(\frac{11}{6}\pi; \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{9}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle \right\}$$

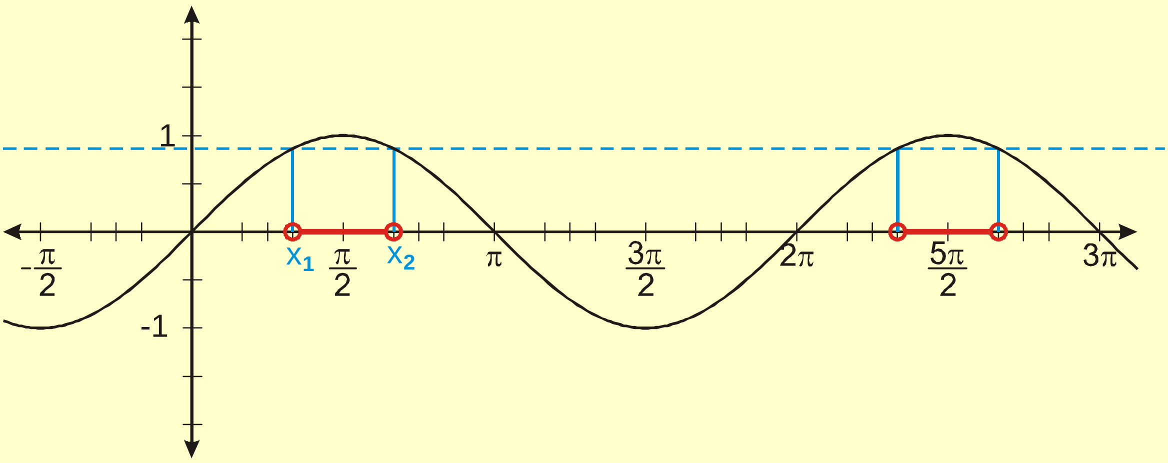
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problém: uvnitř sinu je složitější výraz $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $z = 3x - \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ nerovnice $\sin z > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Základní řešení rovnice: $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $z_1 = \frac{\pi}{3}$, $z_2 = \frac{2}{3}\pi$ (třetinové úhly v kladné polorovině).

Do grafu vyznačíme přímku $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů z_1, z_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin z > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \right)$.

Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi;\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$$z_1=3x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$$

$$3x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \qquad /+\frac{\pi}{3}$$

$$3x_1=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \qquad /:3$$

$$x_1=\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$z_2=3x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$$

$$3x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \qquad /+\frac{\pi}{3}$$

$$3x_2=\pi+k\cdot 2\pi \qquad /:3$$

$$x_2=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi;\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2}{3}\pi\right)$$

Pedagogická poznámka: Při substituci nepoužíváme standardní označení proměnné *y*, kvůli možnosti záměny s označením osy *y* v grafu. Studenti samozřejmě budou *y* při substituci často používat, pokud se jim nezačne plést s označením osy, není to na závadu.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $|\cos x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problém: $\cos x$ je uvnitř absolutní hodnoty $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $a=\cos x \Rightarrow$ nerovnice $|a|=|a-0|>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hledáme čísla vzdálená od nuly více než o $\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ platí $y\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\infty\right)$.

Přepíšeme interval hodnot $a=\cos x$ pomocí nerovnic:

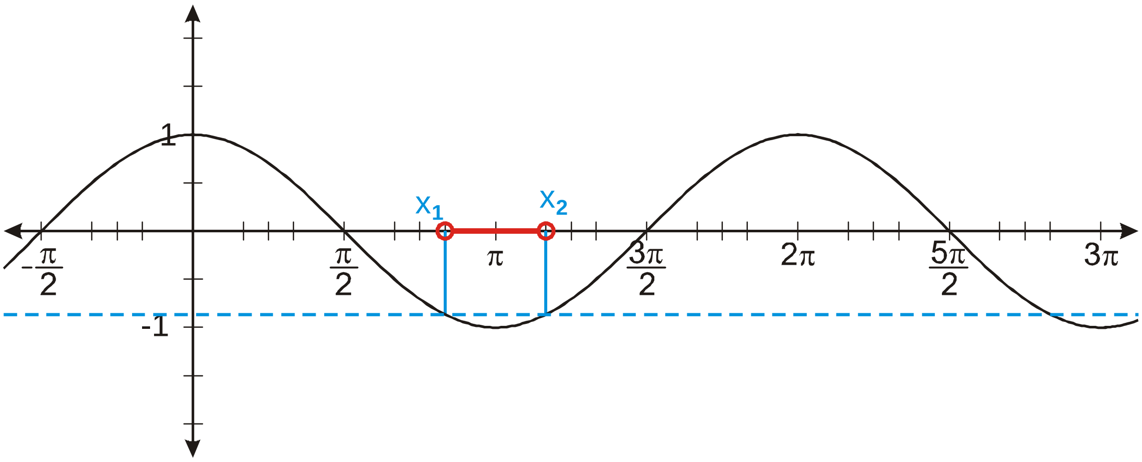
$$a=\cos x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\infty\right) \Leftrightarrow a=\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nebo } a=\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota *x* splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{5}{6}\pi$, $x_2=\frac{7}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině osy *x*).

Do grafu vyznačíme přímku $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose *x* hledáme čísla, pro která $\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod přímkou $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

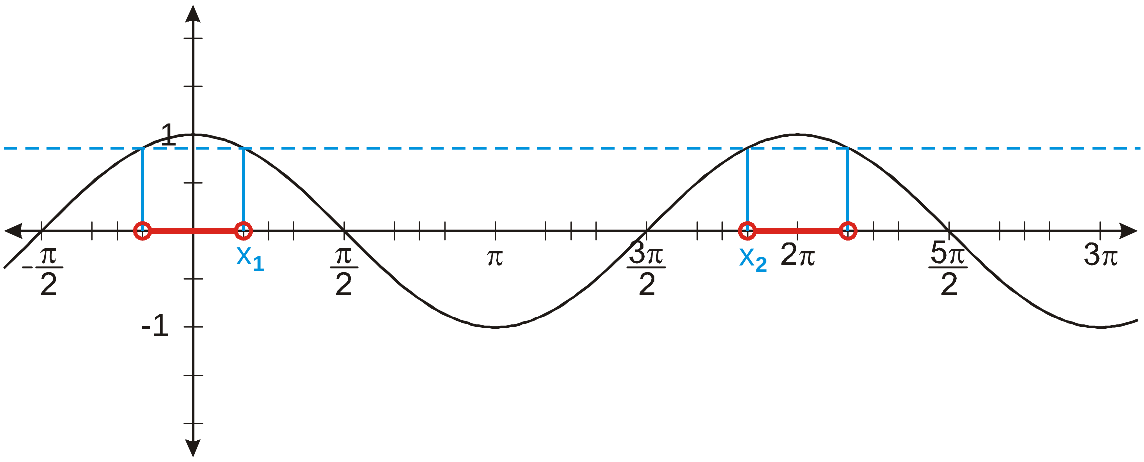


Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{5}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K_1=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right)$.

b) $y=\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v kladné polorovině osy *x*).

Do grafu vyznačíme přímku $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose *x* hledáme čísla, pro která $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K_2=\bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)\right\}$$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $|2\sin x - 1| \geq 1$.

Problém: $\sin x$ je uvnitř absolutní hodnoty $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y = \sin x$ $\Rightarrow$ nerovnice $|2a-1| \geq 1$.

Nerovnici nemůže ihned interpretovat pomocí vzdálenosti obrazů bodů na číselné ose $\Rightarrow$ upravíme: $|2a-1| = 2\left|a - \frac{1}{2}\right|$

$2\left|a - \frac{1}{2}\right| \geq 1 \quad /:2$

$\left|a - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$

Hledáme čísla vzdálená od $\frac{1}{2}$ více než o (nebo přesně o) $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ platí $a \in (-\infty;0\rangle \cup \langle 1;\infty)$.

Přepíšeme interval hodnot $a = \sin x$ pomocí nerovnic:

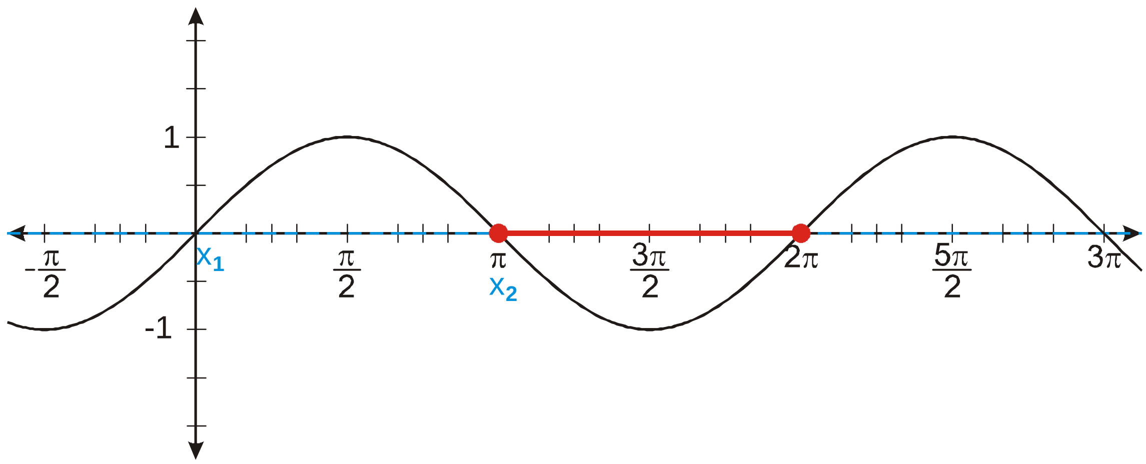
$a = \sin x \in (-\infty;0\rangle \cup \langle 1;\infty) \Leftrightarrow a = \sin x \leq 0$ nebo $a = \sin x \geq 1$.

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $a = \sin x \leq 0$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Do grafu vyznačíme přímku $y = 0$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \leq 0$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod nebo na přímce $y = 0$.



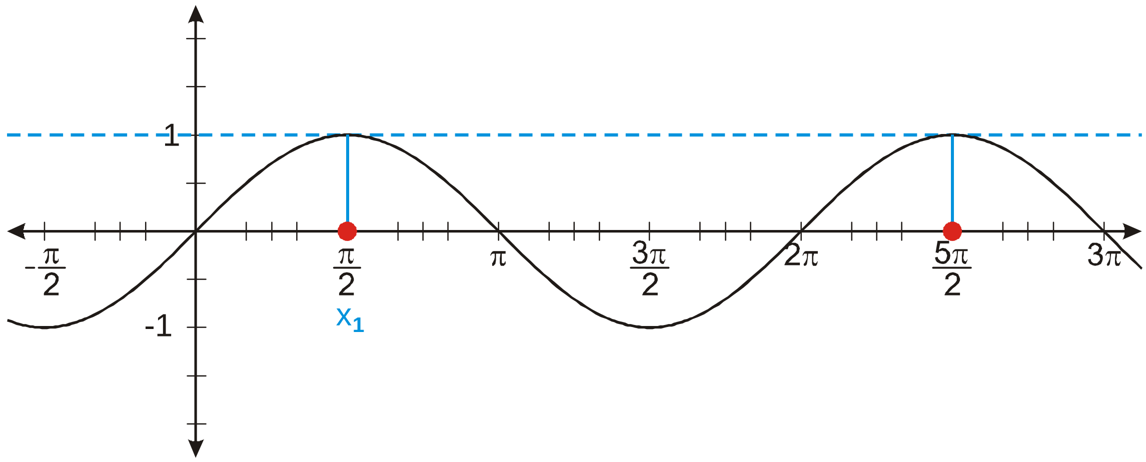
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\langle \pi;2\pi \rangle$, hodnoty se opakují s periodou 2π

$\Rightarrow K_1 = \bigcup_{k \in Z} \langle \pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi \rangle$.

b) $a = \sin x \geq 1$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

Do grafu vyznačíme přímku $y = 1$ a určenou hodnotu úhlu x_1. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \geq 1$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad nebo na přímce $y = 1$.



Řešením nerovnice je číslo $\frac{\pi}{2}$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K_2 = \bigcup_{k\in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$.

$$K = \bigcup_{k\in Z} \left\{ \left\langle \pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle \cup \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 5: Petáková:
strana 55/cvičení 26 e) f)
strana 55/cvičení 27 a) b)

Shrnutí: Při řešení goniometrických nerovnic používáme postupy známé z řešení rovnic.